

高三模拟考试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	B	A	B	A	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	BCD	AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{5}$ ；14. 12；

15. 1, -1 (答案不唯一：第 1 个数大于 0，第 2 个数小于 0 即可)；16. $\frac{3}{4}$.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】

(1) 因为 $a = \sqrt{5}$ ， $\sin A + \sqrt{5} \sin B = 2\sqrt{2}$ ，

所以 $\sin A + a \sin B = 2\sqrt{2}$ ，因为 $a \sin B = b \sin A$ ，

所以 $\sin A + 3 \sin A = 2\sqrt{2}$ ，解得 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a < b$ ，所以 A 为锐角，

所以 $A = \frac{\pi}{4}$ ；

(2) 因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，

所以 $c^2 - 3\sqrt{2}c + 4 = 0$ ，解得 $c = \sqrt{2}$ 或 $c = 2\sqrt{2}$ ，

当 $c = \sqrt{2}$ 时， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$ ，

当 $c = 2\sqrt{2}$ 时， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ 或 3.

18. 【解析】

$$(1) a=2 \text{ 时, } f(x)=\begin{cases} 2(x+1)e^x, & x \leq 0, \\ x^2 - 2x + \frac{1}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 2(x+2)e^x$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, 0)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 的最小值为 $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$;

当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = -\frac{1}{2}$;

因为 $-\frac{2}{e^2} > -\frac{1}{2}$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$;

(2) 显然 $a \neq 0$;

因为 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 有且只有一个零点 -1 ,

所以 原命题等价于 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 - 2 > 0, \\ a > 0 \end{cases} \text{ 解得 } a > \sqrt{2},$$

故 实数 a 的取值范围是 $(\sqrt{2}, +\infty)$.

19. 【解析】

(1) 证明: 连接 A_1C_1 , 则 $B_1D_1 \perp A_1C_1$, 因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

$B_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $AA_1 \perp B_1D_1$;

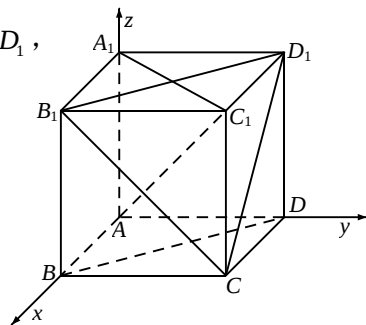
又因为 $AA_1 \cap A_1C_1 = A_1$, 所以 $B_1D_1 \perp$ 平面 AA_1C_1 ;

因为 $AC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1 , 所以 $B_1D_1 \perp AC_1$;

同理 $B_1C \perp AC_1$; 因为 $B_1D_1 \cap B_1C = B_1$, 所以 $AC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1 ;

因为 $AC_1 \parallel$ 平面 α , 过直线 AC_1 作平面 β 与平面 α 相交于直线 l , 则 $AC_1 \parallel l$;

所以 $l \perp$ 平面 B_1CD_1 ; 又 $l \subset$ 平面 α ,



所以 平面 $\alpha \perp$ 平面 B_1CD_1 ;

(2) 设正方体的棱长为 1, 以 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 分别为 x, y, z 轴正方向建立空

间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), C_1(1, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$.

设平面 α 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (1, 1, -2);$$

设 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC_1} (0 \leq t \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (t, t, t)$, 因为 $\overrightarrow{BA} = (-1, 0, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = (t-1, t, t)$;

设直线 BP 与平面 α 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{3t^2 - 2t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{3(t - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}}},$$

所以 当 $t = \frac{1}{3}$ 时, $\sin \theta$ 取到最大值为 $\frac{1}{2}$,

此时 θ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

20. 【解析】

(1) 设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$, 代入 $y^2 = 2x$,

$$\text{得 } y^2 - 2my - 2 = 0,$$

所以 $y_A \cdot y_B = -2$;

(2) 由 (1) 同理可得 $y_M \cdot y_N = -2$,

设直线 AN 的方程 $x = ny + 2$, 代入 $y^2 = 2x$, 得 $y^2 - 2ny - 4 = 0$,

所以 $y_A \cdot y_N = -4$,

$$\text{又 } k_1 = \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} = \frac{y_N - y_A}{\frac{y_N^2}{2} - \frac{y_A^2}{2}} = \frac{2}{y_N + y_A}, \quad \text{同理 } k_2 = \frac{2}{y_M + y_B};$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{k_2}{k_1} = \frac{y_A + y_N}{y_B + y_M} = \frac{y_A + y_N}{\frac{-2}{y_A} + \frac{-2}{y_N}} = \frac{y_A y_N}{-2} = 2,$$

所以 存在实数 $\lambda = 2$ ，使得 $k_2 = 2k_1$ 。

21. 【解析】

(1) 设根据剔除后数据建立的 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，

$$\text{剔除异常数据后的数学平均分为 } \frac{1110 - 110}{10} = 100,$$

$$\text{剔除异常数据后的物理平均分为 } \frac{660 - 0}{10} = 66,$$

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{68586 - 110 \times 0 - 10 \times 66 \times 100}{120426 - 110^2 - 10 \times 100^2} = \frac{2586}{8326} \approx 0.31,$$

$$\text{则 } \hat{a} = 66 - 0.31 \times 100 = 35,$$

所以 所求回归直线方程为 $\hat{y} = 0.31x + 35$ 。

又物理缺考考生的数学成绩为 110，

所以 估计其可能取得的物理成绩为 $\hat{y} = 0.31 \times 110 + 35 = 69.1$ 。

(2) 由题意知 $\mu = 66$ ，

$$\text{因为 } \sum_{i=1}^{11} y_i^2 = \sum_{i=1}^{11} (y_i - \bar{y})^2 + 11\bar{y}^2 = 4770 + 11 \times \left(\frac{660}{11}\right)^2 = 44370,$$

$$\text{所以 } \sigma = \sqrt{\frac{1}{10} \times 44370 - 66^2} = \sqrt{81} = 9,$$

所以 参加该次考试的 10000 名考生的物理成绩服从正态分布 $N(66, 9^2)$ ，

$$\text{则物理成绩不低于 75 分的概率为 } \frac{1 - 0.683}{2} = 0.1585,$$

由题意可知 $Y \sim B(10000, 0.1585)$ ，

所以 物理成绩不低于 75 分的人数 Y 的期望

$$EY = 10000 \times 0.1585 = 1585.$$

22. 【解析】

(1) 先证明 $\ln(x+1) < x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，

$$\text{记 } f(x) = \ln(x+1) - x, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $x > 0$ 时， $f(x) < f(0) = 0$ ，

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时， $\ln(x+1) < x$ 。

又 $a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(a_n + 1) < \frac{1}{2} a_n$, 即 $a_n > 2a_{n+1} > a_{n+1}$.

即 $a_{n+1} < a_n$, 得证.

(2) 要证 $a_n - 2a_{n+1} < a_n \cdot a_{n+1}$ 成立,

只需证 $a_n - \ln(a_n + 1) < \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \ln(a_n + 1)$ 成立, 即证 $\ln(a_n + 1) > \frac{2a_n}{a_n + 2}$ 成立;

记 $g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$, $x \in (0, +\infty)$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$,

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$,

又 $a_n > 0$, 所以 $\ln(a_n + 1) > \frac{2a_n}{a_n + 2}$, 得证.

(3) 由 (2) 知 $a_n - 2a_{n+1} < a_n \cdot a_{n+1}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{2}{a_n} + 1$,

则 $\frac{1}{a_{n+1}} + 1 < \frac{2}{a_n} + 2 = 2(\frac{1}{a_n} + 1)$, 即 $\frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 1}{\frac{1}{a_n} + 1} < 2$,

又 $\frac{1}{a_1} + 1 = 2$, 所以 $\frac{1}{a_n} + 1 \leq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$,

所以 $a_n \geq \frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$;

由 (1) 知 $a_n > 2a_{n+1}$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$, 又 $a_1 = 1$,

则 $a_n \leq 1 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-1}$.

综上 $\frac{1}{2^n} < a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.